Τετάρτη 8/5/2019

Έστω G ομάδα και H υποομάδα της G. Αν για κάθε $a \in G$ υπάρχει $b \in G$ τέτοιο ώστε $aH = Hb$ τότε H κανονική υποομάδα της G

Λύση.

Έστω $a \in G$ τότε υπάρχει $b \in G$: $aH = Hb$. $a = ae \in aH = Hb \Rightarrow$
$\Rightarrow a = hb \Rightarrow h^{-1}a = b$. Άρα $aH = Hb = Hh^{-1}a = Ha \Rightarrow aH = Ha$.

Άρα $H \trianglelefteq G$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $H \trianglelefteq G$ τότε η $\gamma: G \to G/H$ με $\gamma(a) = aH$ είναι ομομορφισμός ομάδων με πυρήνα την H

$$G \to G/H$$
$$a \to aH$$

$\gamma(ab) = abH = aHbH = \gamma(a)\cdot\gamma(b)$. Άρα γ ομομορφισμός.

Έστω $a \in Ker\gamma \Rightarrow \gamma(a) = eH = H \Rightarrow aH = H$ $a = a\underset{\in H}{e} \in aH = H$
$\Rightarrow a \in H$ Δηλ. $Ker\gamma \subset H$

Έστω $h \in H$ $\gamma(h) = hH = H \Rightarrow h \in Ker\gamma$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΟΥ ΟΜΑΔΩΝ)

Έστω $\varphi: G \to G'$ ένας ομομορφισμός ομάδων τότε
$G/Ker\varphi \cong \varphi(G)$

$\psi(gH) = \varphi(g)$

Έστω $aH = bH \Rightarrow a = ae \in aH = bH \Rightarrow a = bh$

$\psi(aH) = \varphi(a) = \varphi(bh) \underset{\varphi \text{ ομομορφ.}}{=} \varphi(b)\cdot\varphi(h) = \varphi(b)\cdot e' = \varphi(b) = \psi(bH)$

αφού $h \in Ker\varphi$. Άρα ψ καλά ορισμένη

$\psi((aH)(bH)) = \psi(abH) = \varphi(ab) \underset{\text{ομομορφ}}{\overset{\varphi}{=}} \varphi(a)\,\varphi(b) = \psi(aH)\cdot\psi(bH)$

Άρα ψ ομομορφισμός

το ουδέτερο της $\varphi(G) \subset G'$

Έστω $aH \in Ker\psi \Rightarrow \psi(aH) = e' \Rightarrow \varphi(a) = e' \Rightarrow a \in Ker\varphi = H$

$\Rightarrow \underset{a\in H}{aH} = H = eH$. Άρα $aH = eH$.

$eH \subset Ker\psi \Rightarrow Ker\psi = \{eH\} \Rightarrow \psi$ 1-1

Έστω $x \in \varphi(G) \Rightarrow x = \underset{g\in G}{\varphi(g)} = \psi(gH)$. Άρα ψ επί

Συνεπώς ψ ισομορφισμός $G/Ker\varphi \cong \varphi(G)$.

ΑΣΚΗΣΗ: Αποδείξτε ότι $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$ κυκλική ομάδα

Η $\mathbb{Z}$ είναι αβελιανή ομάδα άρα κάθε υποομάδα της είναι κανονική, δηλαδή $n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_n$$

$$\varphi(a) = [a]_n$$

$\varphi(a+b) = [a+b]_n = [a]_n + [b]_n = \varphi(a) + \varphi(b)$ Άρα φ ομομορφισμός.

$\mathbb{Z}/Ker\varphi \cong \varphi(\mathbb{Z})$

Έστω $a \in Ker\phi \Rightarrow \varphi(a) = [0]_n \Rightarrow [a]_n = [0]_n \Rightarrow a = 0 \mod n$

$n \mid a - 0 = a \Rightarrow a \in n\mathbb{Z} \Rightarrow Ker\varphi \subset n\mathbb{Z}$.

Έστω $b \in n\mathbb{Z} \Rightarrow b = n \cdot k \Rightarrow \varphi(b) = \varphi(nk) = [nk]_n = [0]_n$

$b \in Ker\phi$. Άρα $n\mathbb{Z} \subset Ker\phi$.

Έστω $[a]_n = \varphi(a)$. Άρα φ επί $\mathbb{Z}/Ker\varphi \simeq \varphi(\mathbb{Z})$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$

nxn πραγμ. πίνακες $\det \neq 0$ — nxn πραγμ. πίνακες με $\det = 1$

ΑΣΚΗΣΗ. Δείξτε ότι $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$

Πρέπει πρώτα να δείξω ότι $SL_n(\mathbb{R}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{R})$

$$GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$\varphi(A) = \det(A)$$

$\varphi(AB) = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$. Άρα φ-ομομορφισμός

Έστω $A \in Ker\phi \Rightarrow \varphi(A) = 1 \Rightarrow \det A = 1 \Rightarrow A \in SL_n(\mathbb{R})$

Άρα $Ker\varphi \subseteq SL_n(\mathbb{R})$.

Έστω $A \in SL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi(A) = \det A = 1 \Rightarrow A \in Ker\varphi$

Δηλαδή $SL_n(\mathbb{R}) \subseteq Ker\varphi$. Συνεπώς $Ker\varphi = SL_n(\mathbb{R})$.

Άρα $SL_n(\mathbb{R}) = Ker\phi \trianglelefteq GL_n(\mathbb{R})$.

Έστω $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ τότε $\varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda & * & * & * \\ & 1 & * & * \\ & 0 & \ddots & * \\ & & & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda & * & * & * \\ & 1 & * & * \\ & 0 & \ddots & * \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \lambda 1 \cdots 1 = \lambda$

Άρα φ επί.

Θεώρημα Θεμ. Ομομορφ. $G/Ker\phi \simeq \varphi(G)$, $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$

ΑΣΚΗΣΗ. Δ.ό $A_n \trianglelefteq S_n$ και $S_n/A_n \simeq \{1,-1\}$ για $n \geq 2$

$$S_n \longrightarrow \{1,-1\}$$
$$\sigma \longrightarrow sign\,\sigma = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sigma \in A_n \\ -1, & \text{αν } \sigma \in B_n \end{cases}$$

$\varphi(\sigma\tau) =$

Περιπτώσεις:

1) $\sigma \in A_n,\ \tau \in A_n$: $\varphi(\underbrace{\sigma\tau}_{\in A}) = 1 = 1 \cdot 1 = \varphi(\sigma)\cdot\varphi(\tau)$.

2) $\sigma \in A_n,\ \tau \in B_n$: $\varphi(\underbrace{\sigma\tau}_{\in B_n}) = -1 = 1\cdot(-1) = \varphi(\sigma)\cdot\varphi(\tau)$

3) $\sigma \in B_n,\ \tau \in A_n$:

4) $\sigma \in B_n,\ \tau \in B_n$:

Άρα φ-ομομορφισμος

$\mathrm{Ker}\varphi = \{\sigma \in S_n \mid \varphi(\sigma) = 1\} = \{\sigma \in S_n \mid \mathrm{sign}\,\sigma = 1\} = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \in A_n\} = A_n$

$\varphi(I) = 1$ φ επί $A_n = \mathrm{Ker}\varphi \trianglelefteq S_n$

$\varphi((1,2)) = -1$

Θεμελ. Θεωρ. Ομομορφ. $G/\mathrm{Ker}\varphi \cong \varphi(G)$

$S_n/A_n \cong \{1,-1\}$